Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. Calcular el valor de los parámetros *c* y *d* sabiendo que la gráfica de la función f: R $\rightarrow$ R definida por $f(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d$, tiene como recta tangente en el punto P(1,-2) la recta de ecuación $y = 5x - 7$.

(2'5 puntos)

Solución

Como $f(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d$ tiene como recta tangente en el punto P(1,-2) la recta de ecuación $y = 5x - 7$, por punto tenemos **f(1) = -2** y como $y = 5x - 7$ es la recta tangente a la gráfica fe f en x = 1, tenemos que **f '(1) = y ' = 5**.

Tenemos:
$f(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d$
$f'(x) = 6x^2 - 2x + c$

De f '(1) = 5 tenemos 5 = 6 – 2 + c, luego **c = 1.**
De f(1) = -2 tenemos -2 = 2 – 1 + (1) + d, luego **d = -4.**

Los coeficientes pedidos son c = 1 y d = 4 y la función será $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$

2.- Resolver las siguientes integrales

a) $\int_{1/2}^{e/2} \frac{(\ln(2x))^2}{3x}dx$ (1'25 puntos) b) $\int \frac{3x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}}{x^2}dx$ (1'25 puntos)

a)
Calculamos primero la integral indefinida

$$\int \frac{(\ln(2x))^2}{3x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \ln(2x) = t \\ \frac{2dx}{x} = dt \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{2} \end{array} \right\} = \int \frac{t^2}{3\cdot 2}dt = \frac{t^3}{18} + K = \frac{(\ln(2x))^3}{18} + K$$

Luego $\int_{1/2}^{e/2} \frac{(\ln(2x))^2}{3x}dx = \left[\frac{(\ln(2x))^3}{18} \right]_{1/2}^{e/2} = \frac{(\ln(2(e/2))^3}{18} - \frac{(\ln(2(1/2))^3}{18} = \frac{(\ln(e))^3}{18} - \frac{(\ln(1))^3}{18} = \frac{1}{18} - 0 = \frac{1}{18.}$

b)

Ejercicio (5) $\int \frac{3x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}}{x^2}dx = \int \frac{3x^4}{x^2}dx + \int \frac{5x^2}{x^2}dx + \int \frac{x^{1/2}}{x^2}dx = 3\int x^2dx + 5\int dx + \int x^{-3/2}dx =$

$$= \frac{3x^3}{3} + 5x + \frac{x^{-3/2+1}}{-3/2+1} + K = \frac{3x^3}{3} + 5x + \frac{x^{-1/2}}{-1/2} + K = x^3 + 5x - \frac{2}{x^{1/2}} + K = x^3 + 5x - \frac{2}{\sqrt{x}} + K$$

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcular el valor x para que se cumpla: $A + B + C^2 = 3\cdot I_2$, donde I_2 es la matriz identidad de orden 2 (1 punto)

b) Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial: $A\cdot X + C^2 = 3\cdot I^2$ (1,5 puntos)

a)

Calcular el valor x para que se cumpla: $A + B + C^2 = 3\cdot I_2$, donde I_2 es la matriz identidad de orden 2

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix};\ 3\cdot I_2 = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A + B + C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x-2 \\ x-2 & 3 \end{pmatrix}$$

De $A + B + C^2 = A + B + C^2$, tenemos $x - 2 = 0$ de donde **$x = 2$.**

b)

Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial: $A\cdot X + C^2 = 3\cdot I^2$

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (0) = -1 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

$|A| = -1$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; luego $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = (1/-1)\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

De $A\cdot X + C^2 = 3\cdot I^2$, tenemos $A\cdot X = 3\cdot I^2 - C^2$. Multiplicando por la izquierda, la expresión anterior, por A^{-1}, tenemos:

$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(3\cdot I_2 - C^2) \rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot(3\cdot I_2 - C^2) \rightarrow X = A^{-1}\cdot(3\cdot I_2 - C^2)$.

Luego $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(3\cdot I_2 - C^2) =} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Dado el plano π: $5x + ay + 4z - 5 = 0$ y la recta r: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{6} = \dfrac{z-2}{-4}$, se pide

a) Calcular el valor del parámetro a para que la recta r sea paralela al plano π (1,25 puntos)
b) Para a = 0, calcular el ángulo que forman el plano π y la recta r (1,25 puntos)

a)

Calcular el valor del parámetro a para que la recta r sea paralela al plano π.

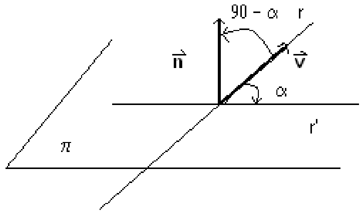
Un vector normal del plano es **n** = (5, a, 4), y un vector director de la recta “r” es **v** = (2, 6, -4). También sabemos que si la recta r sea paralela al plano π, sus vectores respectivos son perpendiculares, por tanto su producto escalar (•) es cero.

Tenemos **n•v** = 0 = (5, a, 4) •(2, 6, -4) = 0 = 10 + 6a -16 = 0 $\rightarrow$ 6a = 6, de donde **a = 1, la recta y el plano son paralelos**

b)

Para a = 0, calcular el ángulo que forman el plano π y la recta r

Para a = 0 el vector normal del plano π es **n** = (5, 0, 4) y el vector director de r era **v** = (2, 6, -4).



Se observa que el ángulo α que forma la recta “r” con el plano π es el complementario (90º - α) del menor de los ángulos que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano con un origen común, es decir $<r,\pi> = \alpha$, ahora bien como sen (α) = cos(90º - α), tenemos:

sen(α) = sen($<r,\pi>$) = cos(90º- α) = |cos(<**v**,**n**>)| = $\left|\frac{\vec{v}\bullet\vec{n}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}\right|$, de donde $\alpha = \text{arsen}\left(\left|\frac{\vec{v}\bullet\vec{n}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}\right|\right)$.

Vector director de la recta **v** = (2, 6, -4); Vector normal del plano **n** = (5, 0, 4)

v•n = 10 + 0 - 16 = -6; ||**v**|| = $\sqrt{(2^2 + 6^2 + 4^2)} = \sqrt{(56)}$; ||**n**|| = $\sqrt{(5^2 + 0^2 + 4^2)} = \sqrt{(41)}$

sen(α) = sen($<r,\pi>$) = cos(90º-α) = |cos(<**u**,**n**>)| = $\left|\frac{\vec{v}\bullet\vec{n}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}\right| = \frac{|-6|}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{41}} = \frac{6}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{41}} \cong$ 0’12521758, por tanto

α = arsen(0’12521758) = 7’17º = 7º 11’ 35’96’’

OPCIÓN B

1.- Dada la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$ se pide

a) Determinar los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento (1,5 puntos)
b) Calcular los máximos y mínimos relativos (1 punto)

Resolvemos el apartado (a) y (b) a la vez

Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Me están pidiendo la monotonía. El estudio de la 1ª derivada

$f(x) = \dfrac{x^2}{e^{x^2}} = x^2 e^{-x^2}$.

$f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2} \cdot (2x) \cdot (1 - x^2)$

De $f'(x) = 0$, tenemos $(2x)\cdot(1 - x^2) = 0$, puesto que la exponencial e^{-x^2} nunca se anula.
Las soluciones de $(2x)\cdot(1 - x^2) = 0$, son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$, que serán los posibles extremos relativos.

Como $f'(-2) = (+)\cdot(-4)\cdot(-3) = (+)\cdot(12) > 0$, *f(x) es estrictamente creciente* $(\nearrow)$ *en* $(-\infty,-1)$
Como $f'(-0'5) = (+)\cdot(-1)\cdot(0'75) = (+)\cdot(-0'75) < 0$, *f(x) es estrictamente decreciente* $(\searrow)$ *en* $(-1,0)$
Como $f'(0'5) = (+)\cdot(1)\cdot(0'75) = (+)\cdot(0'75) > 0$, *f(x) es estrictamente creciente* $(\nearrow)$ *en* $(0,1)$
Como $f'(2) = (+)\cdot(4)\cdot(-3) = (+)\cdot(-12) < 0$, *f(x) es estrictamente decreciente* $(\searrow)$ *en* $(1, +\infty)$

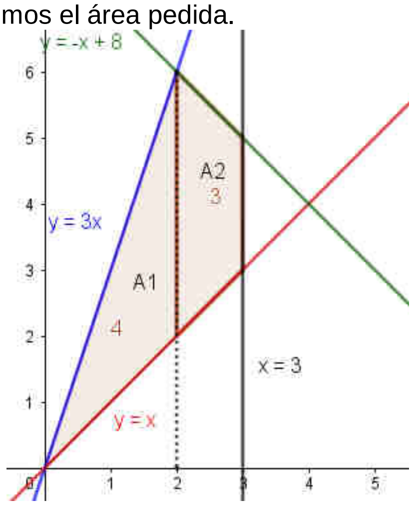
Por definición $x = -1$ *es un máximo relativo que vale* $f(-1) = (-1)^2\cdot e^{-1} = 1/e \cong 0'37$.

Por definición $x = 0$ *es un mínimo relativo que vale* $f(0) = (0)^2\cdot e^0 = 0$.

Por definición $x = 1$ *es un máximo relativo que vale* $f(1) = (1)^2\cdot e^{-1} = 1/e \cong 0'37$.

2. Dibujar y calcular el área de la región del plano limitada por las siguientes rectas:
$y = 3x$; $y = x$; $y = -x + 8$; $x = 3$ (2'5 puntos)

Dibujamos primer las rectas, vemos sus puntos de corte (serán los límites de integración, salvo x = 3 que ya me lo han dado) y después calcularemos el área pedida.



Corte de 3x con x
Tenemos 3x = x, de donde 2x = 0, luego x = 0.

Corte de 3x con -x + 8
Tenemos 3x = -x + 8, de donde 4x = 8, luego x = 2.

El área pedida es A = $A_1 + A_2 = \int_0^2 (3x - (x))dx + \int_2^3 (-x + 8 - (x))dx = \int_0^2 (2x)dx + \int_2^3 (-2x + 8)dx =$

$= \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{-2x^2}{2} + 8x\right]_2^3 = [\,(2^2 - 0)\,] + [\,(-3^2 + 24) - (-2^2 + 16)\,]$ u.a. = 4 - 9 + 24 + 4 - 16 u.a. **= 7 u.a.**

3. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{l} 2x + y + kz = 1 \\ kx + 2y - z = -2 \\ y - 3z = -3 \end{array}\right.$,

a) Estudiarlo y clasificarlo para los distintos valores del parámetro k (1,5 puntos)
b) Resolverlo para k =2 (1 punto)

a)
Estudiarlo y clasificarlo para los distintos valores del parámetro k.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ k & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 1 \\ k & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ k & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_2 + 3C_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & k+3 \\ k & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= 0 - (1)\cdot(10 - k^2 - 3k + 0 = k^2 + 3k - 10$.

De $|A| = 0 \to k^2 + 3k - 10 = 0 \to k = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$, de donde k=(-3+7)/2 = 2 y k=(-3-7)/2 = -5.

Si **k ≠ 2 y k ≠ -5,** rango(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas**, y el sistema es compatible y determinado y el sistema tiene una única solución.**

Si **k = 2,** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$, tenemos que rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_2 + 3C_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, porque la columna 1ª y la 4ª son proporcionales, por tanto rango(A*) = 2

Tenemos **rango(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas, y el sistema es compatible e indeterminado y el sistema tiene infinitas soluciones (más de una solución).**

Si **k = -5,** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ -5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 0 = -5 \neq 0$, tenemos que rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_2 + 3C_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= 0-(1)\cdot(16+20)+0 = -36 \neq 0$, por tanto rango(A*) =3.

Tenemos **rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3, por tanto el sistema es incompatible y no tiene solución.**
b)
Resolverlo para $k = 2$.

Hemos visto en el apartado (a) que, si **k = 2**, teníamos rango(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas**, y el sistema era compatible e indeterminado y tenía infinitas soluciones (más de una solución).**

Como el rango es 2 tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, tomamos la 2ª y la 3ª que son las ecuaciones con los que he formado el menor de orden 2 distinto de cero para determinar el rango de A.

$2x + 2y - z = -2.$
$y - 3z = -3.$, tomando $\mathbf{z = b} \in R$, tenemos $\mathbf{y = -3 + 3b}$. Entrando en la 1ª ecuación tenemos:
$2x + 2(-3 + 3b) - b = -2 \rightarrow 2x + 2(-3 + 3b) - b = 6 – 2 + 5b \rightarrow \mathbf{x = 2 + 5b/2}$

Las infinitas soluciones del sistema son $\mathbf{(x,y,z) = (2 + (5/2)b, -3 + 3b, b)}$ con $\mathbf{b \in R}$

4. Dados los planos: $\pi_1 : x – y + 3 = 0$; $\pi_2 : 2x + y - z = 0$, determinar
a) La ecuación de la recta perpendicular a π_1 que pasa por el punto P(2, 2, 1). (1 punto)
b) La ecuación del plano perpendicular a la recta que determinan π_1 *y* π_2 que contiene al punto A(1,1,−1) (1,5 puntos)

a)
La ecuación de la recta perpendicular a π_1 un vector director de la recta **u** es el vector normal **n** de $\pi_1 : x – y + 3 = 0$, es decir **u** = **n** = (1, -1, 0). Como pasa por el punto P(2, 2, 1) la recta pedida en forma vectorial es: $r \equiv \mathbf{(x,y,z) = (2, 2, 1) + c\cdot(1, -1, 0) = (2 + c, 2 - c, 1)}$**, con** $\mathbf{c \in R}$.

b)
La ecuación del plano perpendicular a la recta que determinan π_1 *y* π_2 que contiene al punto A(1, 1, -1)

Para el plano π_3 tomamos el punto A(1, 1, -1) y como vectores independientes los normales de π_3 y π_3, es decir $\mathbf{n_1}$ = (1, -1, 0) y $\mathbf{n_2}$ = (2, 1, -1)

Tenemos $\pi_3 \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}) = \det(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 =$

$= (x - 1)(1 - 0) - (y - 1)(-1 - 0) + (z + 1)(1 + 2) = 0 = \mathbf{x + y + 3z + 1 = 0}.$